המושג של Profile Likelihood במסגרת כללית

נניח מודל סטטיסטי עם שני פרמטרים ψ, ϕ (שניהם סקלאריים). נסמן ב- $L(\psi,\phi)$ את פונקצית הנראות ו- $\ell(\psi,\phi) = L(\psi,\phi)$. כזכור, האמד"ים של ψ, ϕ (שמסמנים אותם ב- $\hat{\phi}, \hat{\psi}$) הינם הערכים של ψ, ϕ שמביאים את $L(\psi,\phi)$ (ואם כן גם $\ell(\psi,\phi)$) למקסימום.

כעת, עבור כל ערך נתון של ψ, נגדיר את $\hat{\phi}(\psi)$ להיות הערך של ϕ שממקסם את $L(\psi,\phi)$ (ואם כן גם $\ell(\psi,\phi)$) כפונקציה של ϕ בעוד ש- ψ קבוע).

עוד נגדיר $\tilde{L}(\psi) = L(\psi, \hat{\phi}(\psi))$. הפונקציה הזאת נקראת ה- profile likelihood function.

נסמן $\tilde{\ell}(\psi) = \log \tilde{L}(\psi)$.

עוד נסמן:

$$\ell'_\psi = \frac{\partial \ell}{\partial \psi}, \quad \ell'_\phi = \frac{\partial \ell}{\partial \phi}$$

$$\ell''_{\psi\psi} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \psi^2}, \quad \ell''_{\psi\phi} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \psi \partial \phi}, \quad \ell''_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \phi^2}$$

$$\tilde{\ell}' = \frac{d\tilde{\ell}}{d\psi}, \quad \tilde{\ell}'' = \frac{d^2\tilde{\ell}}{d\psi^2}$$

בס"ד

מכיוון ש- $\hat{\phi}(\psi)$ ממקסם את $l(\psi, \phi)$ כפונקציה של ϕ נובע כי

$$l'_{\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = 0$$

<u>טענה 1</u>: נסמן ב- $\tilde{\psi}$ הערך של ψ שממקסם את $\tilde{L}(\psi)$ הינו $\hat{\psi}$ (הנ"מ של ψ).

<u>הוכחה</u>: לפי ההגדרות

$$\tilde{L}(\psi) = L(\psi, \hat{\phi}(\psi)) \geq L(\psi, \phi) \quad \forall \psi, \phi$$

$$L(\tilde{\psi}, \hat{\phi}(\tilde{\psi})) = \tilde{L}(\tilde{\psi}) \geq \tilde{L}(\psi) \quad \forall \psi$$

יוצא כי

$$L(\tilde{\psi}, \hat{\phi}(\tilde{\psi})) \geq L(\psi, \phi) \quad \forall \psi, \phi$$

$$\Leftarrow \quad (\tilde{\psi}, \hat{\phi}(\tilde{\psi})) = (\hat{\psi}, \hat{\phi}).$$

בס"ד

$$\nabla^2 \ell = \begin{bmatrix} \ell''_{\psi\psi} & \ell''_{\psi\phi} \\ \ell''_{\psi\phi} & \ell''_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \left[(\nabla^2 \ell)^{-1}\right]_{11}$$

אזי

$$\gamma(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = \tilde{\ell}''(\psi)^{-1} \qquad \forall \psi$$

הוכחה: נשתמש בנוסחא הקלאסית להפיכת מטריצה 2x2:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD-BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

נקבל

$$\gamma = \left[\ell''_{\psi\psi}\ell''_{\phi\phi} - (\ell''_{\psi\phi})^2\right]^{-1} \ell''_{\phi\phi}$$

$$= \left[\ell''_{\psi\psi} - (\ell''_{\phi\phi})^{-1}(\ell''_{\psi\phi})^2\right]^{-1}$$

כעת:

$$\tilde{l}(\psi) = l(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

$$\tilde{l}'_\psi = \frac{d\tilde{l}}{d\psi} = l'_\psi(\psi, \hat{\phi}(\psi)) + l'_\phi(\psi, \hat{\phi}(\psi))\left[\frac{d}{d\psi}\hat{\phi}(\psi)\right]$$

מכיוון ש- $l'_\phi(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = 0$ (כפי שאומר לעיל)
יוצא כי

$$\tilde{l}'_\psi(\psi) = l'_\psi(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

אם כן

$$\tilde{l}''_\psi = \frac{d^2\tilde{l}}{d\psi^2} = l''_{\psi\psi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) + l''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))\left[\frac{d}{d\psi}\hat{\phi}(\psi)\right] \quad (*)$$

בשלב הזה נדרש לחשב את $\frac{d}{d\psi}\hat{\phi}(\psi)$.

נפתח את הענין באופן הבא:

$$l'_\phi(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = 0 \qquad \text{(כדלעיל)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\psi} l'_\phi(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad l''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) + l''_{\phi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))\left[\frac{d}{d\psi}\hat{\phi}(\psi)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\psi}\hat{\phi}(\psi) = -\, l''_{\phi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))^{-1}\, l''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

בס"ד

נציב את זה לתוך הביטוי (*) ונקבל

$$\frac{d^2\tilde{\ell}}{d\psi^2} = \ell''_{\psi\psi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

$$+ \ell''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) \left\{ -\ell''_{\phi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))^{-1} \ell''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) \right\}$$

$$= \ell''_{\psi\psi}(\psi, \hat{\phi}(\psi)) - \ell_{\phi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))^{-1} \ell''_{\psi\phi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

$$= \gamma(\psi, \hat{\phi}(\psi)) = \left[(\nabla^2 \ell)^{-1} \right]_{11} (\psi, \hat{\phi}(\psi))$$

מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: ניתן להכליל את כל הדיון דלעיל למקרה בו ψ ו-ϕ הינם וקטורים. טענה 1 עוברת ללא שינוי בטענה או בהוכחה. בנוגע לטענה 2, אנחנו מגדירים <u>מטריצות</u> $\ell''_{\phi\phi}$, $\ell''_{\phi\psi}$, $\ell''_{\psi\phi}$, $\ell''_{\psi\psi}$ ע"י

$$(\ell''_{\psi\psi})_{rs} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial\psi_r \partial\psi_s}$$

$$(\ell''_{\psi\phi})_{rs} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial\psi_r \partial\phi_s}$$

$$(\ell''_{..}) = \frac{\partial^2 \ell}{\cdot}$$

אזי נוכל לכתוב $\nabla^2 l$ בצורת בלוקים

$$\nabla^2 l = \begin{bmatrix} l''_{\psi\psi} & l''_{\psi\phi} \\ l''_{\phi\psi} & l''_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$Q = (\nabla^2 l)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{\psi\psi} & Q_{\psi\phi} \\ Q_{\phi\psi} & Q_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

ע״פ הנוסחא להופכית של מטריצה סמטרית בצורת בלוקים (ראו, למשל, Rao (1973, p.33)), יש לנו

$$Q_{\psi\psi} = \left(l''_{\psi\psi} - l''_{\psi\phi} {l''_{\phi\phi}}^{-1} l_{\phi\psi}\right)^{-1}$$

$$Q_{\psi\phi} = -{l''_{\phi\phi}}^{-1} l''_{\phi\psi} Q_{\psi\psi}, \quad Q_{\phi\psi} = Q_{\psi\phi}^{T}$$

$$Q_{\phi\phi} = {l''_{\phi\phi}}^{-1} + {l''_{\phi\phi}}^{-1} l''_{\phi\psi} Q_{\psi\psi} l''_{\psi\phi} {l''_{\phi\phi}}^{-1}$$

וע״י דיונים כמו אלה דלעיל, ניתן לראות כי

$$\tilde{l}''_{\psi\psi}(\psi)^{-1} = Q_{\psi\psi}(\psi, \hat{\phi}(\psi))$$