

האוניברסיטה העברית
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן סיום בקורס: **(52609) שיטות חישוביות בסטטיסטיקה**

תאריך הבחינה: 24.2.11, שעה 16:00. (מועד ב)

משך המבחן: שעתיים

חומר מותר בשימוש: 3 דפים כתובים בכתב ידו של הסטודנט.

הוראות: יש לענות על שתי השאלות ולנמק (בקיצור) כל אמירה. בהצלחה!

שאלה 1

משתנה מקרי בינומי סוכם את מספר ההצלחות בשני ניסויים, שבכל אחד מהם ההסתברות להצלחה היא p . המשתנה עשוי לקבל את הערכים 0, 1 ו-2. ההסתברויות לערכים הנ"ל הם $(1-p)^2$, $2p(1-p)$, p^2 , בהתאמה. נאסף מדגם של 75 תצפיות מן ההתפלגות הנתונה. 25 מן התצפיות קבלו את הערך 0. בעבור 50 התצפיות האחרות ידוע כי ערכן אינו 0, אך לא ידוע המספר של התצפיות שערכן 1 ומספר התצפיות שערכן 2. מעוניינים לאמוד את ערכו של הפרמטר p בעזרת הנתונים. שימו לב כי אם החלק היחסי של 50 התצפיות שקיבלו את הערך $2 - \theta -$ היה ידוע אזי אומד הנראות המרבית לפרמטר היה $\hat{p} = 50(1+\theta)/150$.
סעיפי השאלה מתייחסים לקוד הבא:

```
> n21 <- 50
> n0 <- 25
> th <- 0.3
> for(i in 1:100)
+ {
+   p <- (1+th)*n21/(2*(n21+n0))
+   th <- p^2/(1-(1-p)^2)
+ }
> p <- (1+th)*n21/(2*(n21+n0))
> p
[1] 0.4226497
```

1. מבין האפשרויות הבאות, מי המתאימה ביותר לאפיון האלגוריתם בו משתמשים לחישוב האומד ל- p ?

- i. Non-parametric Bootstrap
- ii. Parametric Bootstrap
- iii. EM
- iv. Gibbs

נמקו!

2. הציעו אומד לשונות של המשתנה המקרי הבינומי המתואר בשאלה.

3. כיצד, להערכתכם, היה משתנה ערכו של האומד אם במקום שורת הקוד

```
> th <- 0.3
```

היו משתמשים בשורת הקוד

```
> th <- 0.7
```

4. רשמו קוד, הנעזר בפונקציה `rbinom` לסימולציה של משתנים מקריים בינומיים

ובגישת הבוטסטראפ הפרמטרי (Parametric Bootstrap) כדי לאמוד את שונות האומד שהוצע לאמידת הפרמטר p .

שאלה 2

נתונה תצפית Y . מודל הסתברותי לתצפית מניח כי בהינתן משתנה רקע p , שאינו נצפה, התצפית מפולגת $B(n, p)$. התפלגות משתנה הרקע הנה בתא עם פרמטרים α ו β . הפרמטרים בלתי ידועים ומעוניינים לאמוד את ערכם. זכרו כי הצפיפות של התפלגות בתא נתונה על ידי $f(p) = p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}/B(\alpha, \beta)$.

1. רשמו את הפונקציה שצריך למקסם כדי למצוא את אומדי הנראות המרבית לפרמטרים α ו β .
2. רשמו את לוג הנראות המשותפת של Y ו p אם משתנה הרקע p היה נצפה.
3. חשבו את ההתפלגות המותנה של משתנה הרקע p , בהינתן התצפית Y ובהינתן שערכי הפרמטרים הם α' ו β' .
4. תארו את החישובים שיש לבצע כדי לקבל את הפונקציה $Q(\alpha, \beta/\alpha', \beta')$ והסבירו כיצד ניתן להשתמש בפונקציה זו כדי לאמוד את הפרמטרים המבוקשים.