

האוניברסיטה העברית  
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן סיום בקורס: **(52609) שיטות חישוביות בסטטיסטיקה**

תאריך הבחינה: 7.2.10, שעה 11:00. (מועד א)

משך המבחן: שתיים

חומר מותר בשימוש: 3 דפים כתובים בכתב ידו של הסטודנט.

הוראות: יש לענות על שתי השאלות ולנמק (בקיצור) כל אמירה. בהצלחה!

שאלה 1

התפלגות פואסון עם פרמטר מיקום  $\lambda$  נתונה בעזרת פונקציית ההסתברות  $e^{-\lambda} \lambda^x / x!$  בעבור  $x$  טבעי. נתונים שלושה מדגמים מהתפלגות זו. באחד המדגמים הפרמטר הוא  $\lambda_1$ , בשני הוא  $\lambda_2$  ובשלישי הנו  $\lambda_1 + \lambda_2$ . מעוניינים באמידת ערכי הפרמטרים. תוצאות המדגמים שמורים באובייקטים של  $R$  בשמות  $X.1$ ,  $X.2$  ו- $S$ , בהתאמה. להלן קוד  $R$ :

```
> n.1 <- length(X.1)
> n.2 <- length(X.2)
> n.s <- length(S)
> sumX.1 <- sum(X.1)
> sumX.2 <- sum(X.2)
> sumS <- sum(S)
> lam.1 <- 1
> lam.2 <- 1
> for(i in 1:100)
+ {
+   p.1 <- lam.1/(lam.1 + lam.2)
+   p.2 <- lam.2/(lam.1 + lam.2)
+   lam.1 <- sum(sumX.1 + p.1*sumS)/(n.1+n.s)
+   lam.2 <- sum(sumX.2 + p.2*sumS)/(n.2 + n.s)
+ }
> lam.1
[1] 2.168687
> lam.2
[1] 5.364646
```

1. מבין האפשרויות הבאות, מי המתאימה ביותר לאפיון האלגוריתם בו משתמשים?

- i. Bootstrap
- ii. EM
- iii. HMM
- iv. MCMC

נמקו!

2. ממוצעי שלושת המדגמים התקבלו להיות 1.9, 4.7, ו-8, בהתאמה. האם עובדה זו מתאימה לתוצאה שהתקבלה כתוצאה מהרצת הקוד? נמקו.
3. נטען כי אם היינו מחליפים את ביטוי הקוד "i in 1:100" בביטוי "i in 1:10" אזי בהכרח היו מתקבלים ערכי  $\lambda_1$  ו- $\lambda_2$  נמוכים יותר מן הערכים שהתקבלו. האם הנכם מסכימים עם טענה זו אם לא?
4. רשמו פונקציה המקבלת כקלט 4 סדרות פואסוניות  $X.1$ ,  $X.2$ ,  $X.3$  ו- $S$ , כך שהפרמטר בסדרה  $S$  הוא סכום ערכי הפרמטרים של שלושת הסדרות האחרות. כפלט הפונקציה צריכה לייצר אומדים לשלושת הפרמטרים בהתבסס על הקלט.

## שאלה 2

נתונה תצפית  $Y$ . מודל הסתברותי לתצפית זו מניח כי תצפית זו, בהינתן משתנה רקע  $\lambda$ , שאינו נצפה, מפולגת התפלגות פואסונית עם תוחלת  $\lambda$ . התפלגות משתנה הרקע תלויה במצב המערכת. אם המערכת במצב  $\delta=0$  אזי  $\lambda \sim \text{Exp}(1)$ , בעוד אם המערכת במצב  $\delta=1$  אזי  $\lambda \sim \text{Gamma}(1,1)$ . ההערכה הראשונית היא שההסתברות להיות המערכת במצב  $\delta=1$  היא  $\frac{1}{2}$ . מעוניינים בעדכון הערכה זו כתוצאה מהתצפית.

1. רשמו את ההתפלגות המותנית של  $\lambda$ , בהינתן ערכם של  $Y$  ו- $\delta$ .
2. רשמו את ההתפלגות המותנית של  $\delta$ , בהינתן ערכם של  $Y$  ו- $\lambda$ .
3. הציעו אלגוריתם, המבוסס על שיטתו של Gibbs, המאפשר יצירה של סידרה של זוגות ערכים  $(\lambda_1, \delta_1), (\lambda_2, \delta_2), \dots, (\lambda_n, \delta_n)$  כך שהתפלגות כל זוג ערכים הנה בקירוב ההתפלגות המותנית של הצמד  $(\lambda, \delta)$ , בהינתן התצפית  $Y$ .
4. כיצד ניתן להשתמש בסדרת הזוגות הנ"ל כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת?