ניתוח הישרדות - תרגיל 8

נניח כי

- T הינו זמן עד אירוע עם פונקציית הישרדות $S(t)$ רציפה ופונקציית סיכון $\lambda(t)$
- C הינו זמן עד צנזורה עם $Pr(C \geq t) = G(t)$
- T, C ב"ת
- צופים ב- $X = \min(T, C)$
  $\delta = I(T \leq C)$

נגדיר, כמו בכיתה

$$N(t) = \delta I(X \leq t)$$
$$Y(t) = I(X \geq t)$$

$$A(t) = \int_0^t Y(u)\lambda(u)\,du$$

$$M(t) = N(t) - A(t)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(N(u), Y(u) : u \in (0, t]\right)$$

הוכיחו באופן פורמלי כי $M(t)$ מהווה מרטינגל ביחס ל- $\tilde{\mathcal{F}}_t$ על פי המהלך הבא.

מה שצריכה להוכיח הוא ש-

$$E[M(t)-M(u) \mid \tilde{\mathcal{F}}_u] = 0$$

דהיינו

$$E[(N(t)-N(u)) \mid \tilde{\mathcal{F}}_u] - E\left[\int_u^t Y(s)\lambda(s)\,ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_u\right] = 0$$

דהיינו

$$Pr(T\in(u,t],\ T\le C \mid \tilde{\mathcal{F}}_u) - \int_u^t Pr(X\ge s \mid \tilde{\mathcal{F}}_u)\lambda(s)\,ds = 0$$

כעת נחשב את

$$Pr(T\in(u,t],\ T\le C \mid \tilde{\mathcal{F}}_u)$$

$$Pr(X\ge s \mid \tilde{\mathcal{F}}_u)$$

נעשה את החישוב בנפרד עבור המקרה של $\{X<u\}$ ועבור המקרה של $\{X\ge u\}$,

2. בכיתה רשמנו את התוצאה הבאה:

א. אם $M(t)$ הוא מרטינגל ביחס ל- $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ו- $W(t)$ הוא תהליך predictable ביחס ל- $\tilde{\mathcal{F}}_t$, אזי התהליך

$$\tilde{M}(t) = \int_0^t W(s)\,dM(s)$$

גם הוא מרטינגל, עם

$$\langle \tilde{M}, \tilde{M} \rangle(t) = \int_0^t W^2(s)\,d\langle M, M \rangle(s)$$

תנו הוכחה אינטואיטיבית לתוצאה הזאת.

ב. יהא $B(t)$ תהליך תנועת בראון ונגדיר $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(B(u), u \in [0,t])$.

א. הראו כי $B(t)$ מרטינגל ביחס ל- $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ומצאו $\langle B, B \rangle(t)$

ב. נגדיר

$$Z(t) = \exp\left(B(t) - \frac{1}{2} t^2\right)$$

הראו כי $Z(t)$ מרטינגל ביחס ל- $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ומצאו את $\langle Z, Z \rangle(t)$.