ניתוח הישרדות - תרגיל מס' 5 - פתרון

1. א.
$$\hat{\lambda} = \delta^* / \tau^*$$
$$= (53+90+90+77) / [(6.8+4.3+2.3+0.8) \times 1000]$$
$$= 0.02183$$

ב, ג. ראו את דף הבא. נוסיף את התוצאות הבאות:

ר"ס ל- CMF באופן ישיר:

$$\hat{CMF} \pm 1.96 [\hat{Var}(\hat{CMF})]^{1/2} = 0.95 \pm 1.96 \sqrt{0.0032}$$
$$= [0.84, 1.06]$$

ר"ס ל- SMR באופן ישיר:

$$\hat{SMR} \pm 1.96 [\hat{Var}(\hat{SMR})]^{1/2} = 0.93 \pm 1.96 \sqrt{0.0028}$$
$$= [0.83, 1.03]$$

קיבלנו תוצאות דומות לאלה שמתקבלות דרך טרנספורמצית ה- log.

Age	Deaths (δ^*_{1j})	Person-Years (thousands) (τ^*_{1j})	$\hat{\lambda}_{1j} = \delta^*_{1j} / \tau^*_{1j}$	US Population 1950 θ_{0j}	λ_{0j}
40-49	53	6.8	53/6.8 = 7.79	.374	11.5
50-59	90	4.3	90/4.3 = 20.93	.301	19.3
60-69	90	2.3	90/2.3 = 39.13	.215	41.8
70-79	77	0.8	77/0.8 = 96.25	.109	96.9

$$\hat{CMF} = \Sigma_j \theta_{0j} \hat{\lambda}_{1j} / \Sigma_j \theta_{0j} \lambda_{0j} = 28.12/29.66 = 0.95$$

$$\hat{SMR} = \Sigma_j \tau^*_{1j} \hat{\lambda}_{1j} / \Sigma_j \tau^*_{1j} \lambda_{0j} = 310.0/334.85 = 0.93$$

$$\hat{Var}(\hat{CMF}) = \{\Sigma_j \theta_{0j} \lambda_{0j}\}^{-2} \Sigma_j \theta_{0j}^2 \frac{\hat{\lambda}_{1j}}{n_{1j}} = 0.0032$$

$$\hat{Var}(\hat{SMR}) = \{\Sigma_j \tau^*_{1j} \lambda_{0j}\}^{-2} \delta^*_1 = 0.0028$$

ר"ס על פי קירוב נורמלי בסקלת ה-log:

$$\hat{Var}(\log \hat{CMF}) = (\hat{CMF})^{-2} \hat{Var}(\hat{CMF}) = 0.0034$$

$$\text{CI for } \log CMF = \log 0.95 \pm (1.96)(0.0034)^{1/2}$$
$$= [-0.1673, 0.0605]$$

$$\text{CI for } CMF = [e^{-0.1673}, e^{0.0605}] = [0.85, 1.06]$$

$$\hat{Var}(\log \hat{SMR}) = (\hat{SMR})^{-2} \hat{Var}(\hat{SMR}) = .0032$$

$$\text{CI for } \log SMR = \log 0.93 \pm (1.96)(0.0032)^{1/2}$$
$$= [-.1841, .0389]$$

$$\text{CI for } SMR = [e^{-.1841}, e^{.0389}] = [0.83, 1.04]$$

המשך:

$\delta_1^* = 310,\ e = 334.85,\ \hat{SMR} = 0.9258$

שאלה ⓒ שהוצגה בכיתה: הרו"ס הינו $[f_L \hat{SMR}, f_U \hat{SMR}]$ כאשר הפקטורים f_L, f_U נשלפות מטבלות שחולקו בכיתה. לפי הלוח הפקטורים המתאימים עבור $\delta_1^* = 300$ הינם $f_L = 0.892,\ f_U = 1.121$ והפקטורים עבור $\delta_1^* = 350$ דומים.

לכן מקבלים את הרווח

$$[0.892 \times 0.9258,\ 1.121 \times 0.9258] = [0.826,\ 1.038]$$

שאלה ⓓ שהוצגה בכיתה: הרו"ס הינו $\left[\frac{\mu_L}{e}, \frac{\mu_U}{e}\right]$

כאשר לפי הנוסחאות של Byar

$$\mu_L = \delta_1^* \left(1 - (9\delta_1^*)^{-1} - z_{\alpha/2} (3\sqrt{\delta_1^*})^{-1}\right)^3$$

$$\mu_U = (\delta_1^* + 1)\left(1 - (9(\delta_1^*+1))^{-1} + z_{\alpha/2} (3\sqrt{\delta_1^*})^{-1}\right)^3$$

נציב $z_{\alpha/2} = 1.96,\ \delta_1^* = 310$ ונקבל

$$\mu_L = 276.446, \quad \mu_U = 346.563$$

ומכאן הרו"ס ל- SMR

$$\left[\frac{276.446}{334.85}, \frac{346.563}{334.85}\right] = [0.826,\ 1.035]$$

בהשוואת השאלות קיבלנו תוצאות דומות מכיוון שמספר האירועים δ_1^* הוא יחסית גדול בדוגמא הזאת.

כס׳ן

2. א.

$$\widehat{CMF} = \frac{\Sigma_j \theta_{0j} \hat{\lambda}_{1j}}{\Sigma_j \theta_{0j} \lambda_{0j}} \qquad \left(\theta_{0j} = \frac{n_{0j}}{n_0}\right)$$

$$= \frac{\Sigma_j \theta_{0j} \lambda_{0j} \hat{r}_j}{\Sigma_j \theta_{0j} \lambda_{0j}} = \Sigma_j w_j \hat{r}_j$$

עם $w_j = \theta_{0j} \lambda_{0j} / \Sigma_k \theta_{0k} \lambda_{0k}$

$$\widehat{SMF} = \frac{\Sigma_j \theta_{1j} \hat{\lambda}_{1j}}{\Sigma_j \theta_{1j} \lambda_{0j}} \qquad \left(\theta_{1j} = \frac{n_{1j}}{n_1}\right)$$

$$= \frac{\Sigma_j \theta_{1j} \lambda_{0j} \hat{r}_j}{\Sigma_j \theta_{1j} \lambda_{0j}} = \Sigma_j w_j \hat{r}_j$$

עם $w_j = \theta_{1j} \lambda_{0j} / \Sigma_k \theta_{1j} \lambda_{0j}$

ב. ע"פ מה שלמדנו עבור התפלגות המעריכית

$$\widehat{Var}(\hat{\lambda}_{1j}) = \frac{\hat{\lambda}_{1j}}{n_{1j}} = \frac{\hat{r}_j \lambda_{0j}}{n_{1j}} \doteq \frac{r_j \lambda_{0j}}{n_j}$$

עבור מדגם מספיק גדול

תחת ההנחה ש- $r_j = r \ \forall j$ $\qquad = \dfrac{r \lambda_{0j}}{n_j}$

לכן

$$\widehat{Var}(\hat{r}_j) = \widehat{Var}\left(\frac{\hat{\lambda}_{1j}}{\lambda_{0j}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_{0j}}\right)^2 \widehat{Var}(\lambda_{1j})$$

$$\doteq \left(\frac{1}{\lambda_{0j}}\right)^2 \frac{r \lambda_{0j}}{n_{1j}} = \frac{r}{\lambda_{0j} n_{1j}} = \frac{1}{n_1} \frac{r}{\lambda_{0j} \theta_{1j}}$$

יוצא כי $w_j \propto \widehat{Var}(\hat{r}_j)^{-1}$

זה הגיוני כי Var^{-1} משקף את רמת האינפורמציה

(אם Var^{-1} אזי Var קטן ⇐ אומד יותר מדויק).

לכן שיקלול לפי Var^{-1} מהווה שיקלול לפי רמת האינפורמציה.

<u>הערה</u>: ניגש למקרה בו $r_j = r \quad \forall j$ ולאומדים ל- r בצורת $\hat{r} = \sum w_j \hat{r}_j$ כאשר $\{w_j\}$ הינם משקלות כלליים — כפוף ל- $w_j \geq 0 \ \forall j$ ו- $\sum w_j = 1$.

קל לראות כי $E[\hat{r}] \doteq r$ עבור כל סידרה כזאת של משקולות. נשים לב כי

$$Var(\hat{r}) = \sum_j w_j^2 v_j \qquad\qquad v_j = Var(\hat{r}_j)$$

כעת ניגש לבעיית האופטימיזציה

$$\min \sum_j w_j^2 v_j \quad \text{תחת}$$

$$\text{כפוף ל-} \quad \sum_j w_j = 1$$

נפתור את הבעיה הזו באמצעות שיטת לגרנז':

$$\mathcal{L} = \sum_j w_j^2 v_j + \eta \left(\sum_j w_j - 1\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_r} = 2 w_r v_r - \eta \overset{\text{נשים}}{=}$$

$$\Leftarrow \qquad w_r = \frac{1}{2} \eta v_r^{-1}$$

דהיינו, השיקלול האופטימלי הינו לפי Var^{-1}.

אצלנו, זאת אומרת שאומד ל- r עם השונות הכי הנמוכה מתוך משפחת האומדים מהצורה $\hat{r} = \sum w_j \hat{r}_j$ הינו ... ה- SMR.