ניתוח השרדות - תרגיל מס' 1 - פתרון

1. א.

$$S(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\Lambda(t) = -\log S(t) = \lambda t$$

$$\lambda(t) = \Lambda'(t) = \lambda$$

ב.

$$S(t) = e^{-(\lambda t)^p}$$

$$\Lambda(t) = (\lambda t)^p$$

$$\lambda(t) = p\lambda(\lambda t)^{p-1}$$

ג.

$$S(t) = 1 - \Phi(p \log \lambda t)$$

$$\lambda(t) = -S'(t)/S(t)$$

כלל השרשרת →

$$= \left(\frac{p}{t}\right) \varphi(p \log \lambda t) / [1 - \Phi(p \log \lambda t)]$$

כאשר

$$\varphi(u) = \Phi'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

זאת אומרת

$$\lambda(t) = \left(\frac{p}{t}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(p \log \lambda t)^2}\right] \div [1 - \Phi(p \log \lambda t)]$$

ד.

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \lambda(\lambda u)^{\alpha-1} e^{-\lambda u}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda t} v^{\alpha-1} e^{-v}\, dv \qquad (v = \lambda u)$$

(ניתן לחשב את זה ב- SAS באמצעות הפונקציה PROBGAM)

$$\lambda(t) = f(t)/[1 - F(t)]$$

עבור α כללי, אי-אפשר להגיע לביטוי אנליטי סגור לאינטגרל שב- $F(t)$, אך כאשר α הוא מספר חיובי שלם, אפשר לפתור את האינטגרל (דרך "אינטגרציה בחלקים"). מקבלים

עבור $\alpha=2$: $$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$$

עבור $\alpha=3$: $$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2\right)$$

בנושא הצירים:

עבור Weibull: צריך למצוא λ כך ש-

$$e^{-(\lambda 3)^p} = e^{-3} \Rightarrow \lambda = 3^{(1/p-1)}$$

עבור $p=\frac{1}{2}$, $\lambda = 3$

עבור $p=\frac{3}{2}$, $\lambda = 3^{-1/3} = 0.693$

עבור לוג-נורמלי: צריך למצוא λ כך ש-

$$\Phi(p \log(\lambda 3)) = 1-e^{-3} = 0.9502$$

$$p \log(\lambda 3) = 1.645 \quad \text{(לפי לוח של } N(0,1))$$

$$\lambda = \frac{1}{3} e^{(1.645/p)}$$

עבור $p=1$, $\lambda = 1.727$

עבור $p=3$, $\lambda = 0.577$

עבור גמא: צריך למצוא λ כך ש-

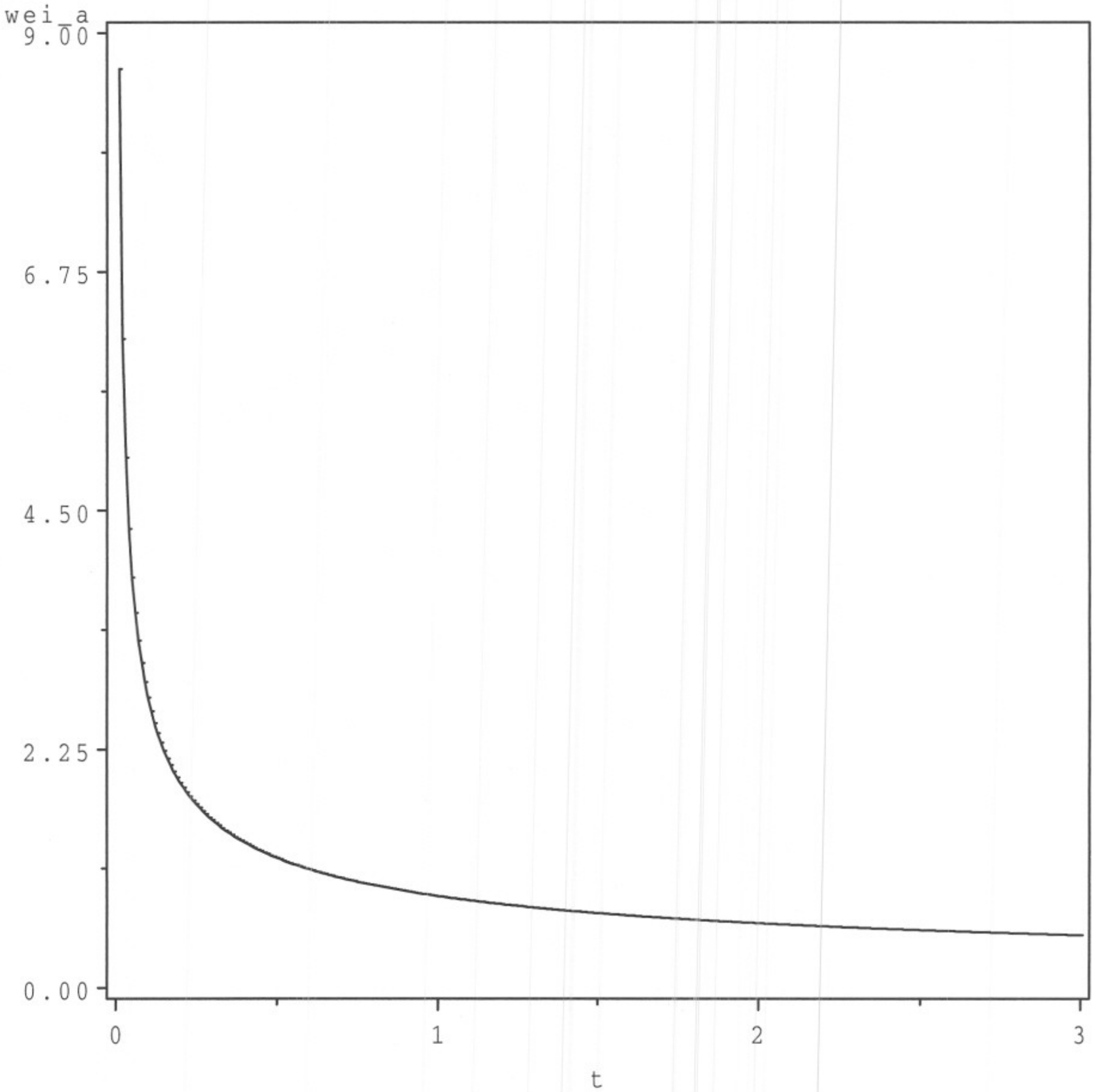
$$PROBGAM(\lambda 3, \alpha) = 1-e^{-3} = 0.9502$$

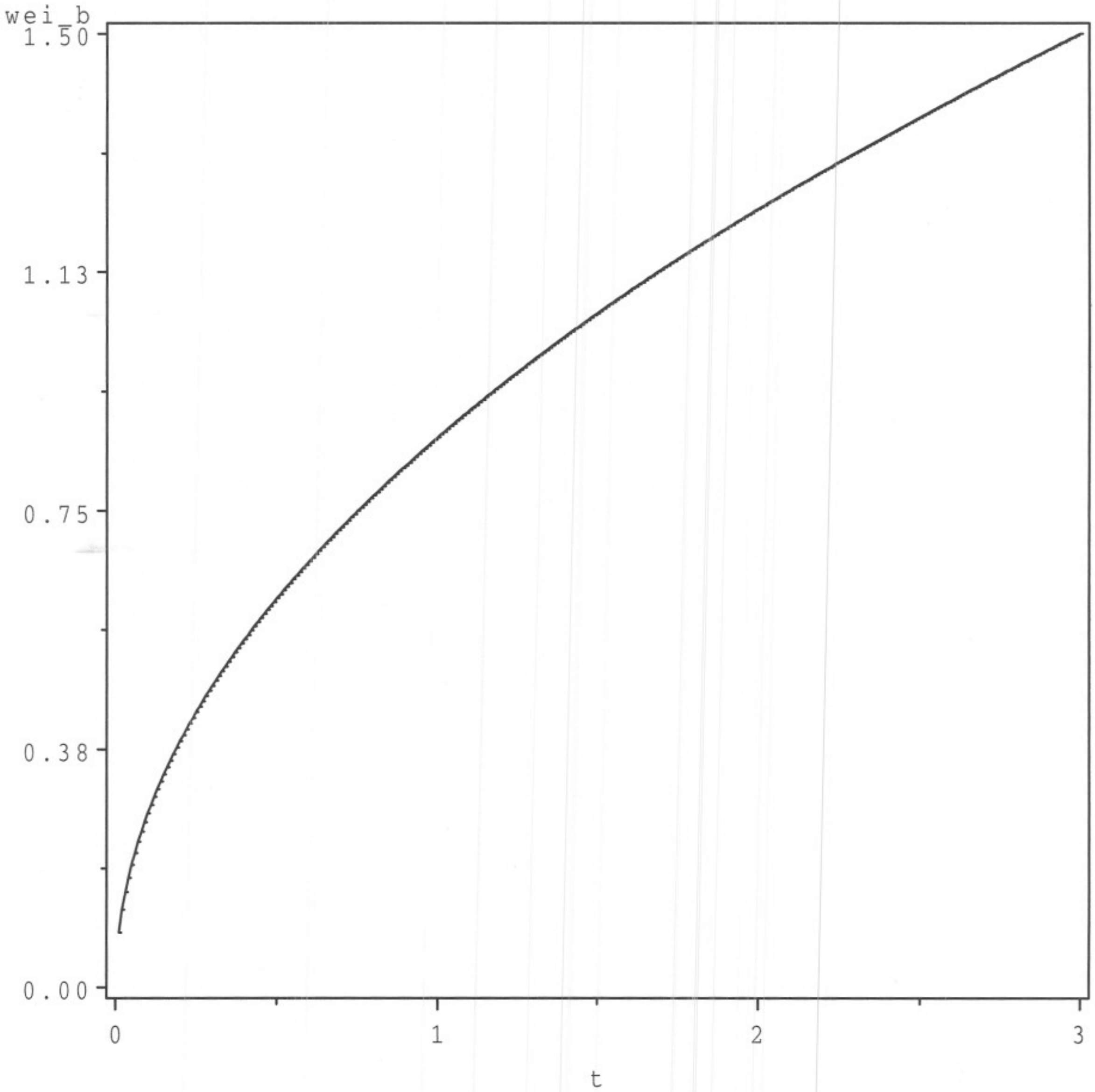
$$\Rightarrow \lambda 3 = GAMINV(0.9502, \alpha) = \begin{cases} 4.75 & \alpha=2 \\ 6.30 & \alpha=3 \end{cases}$$

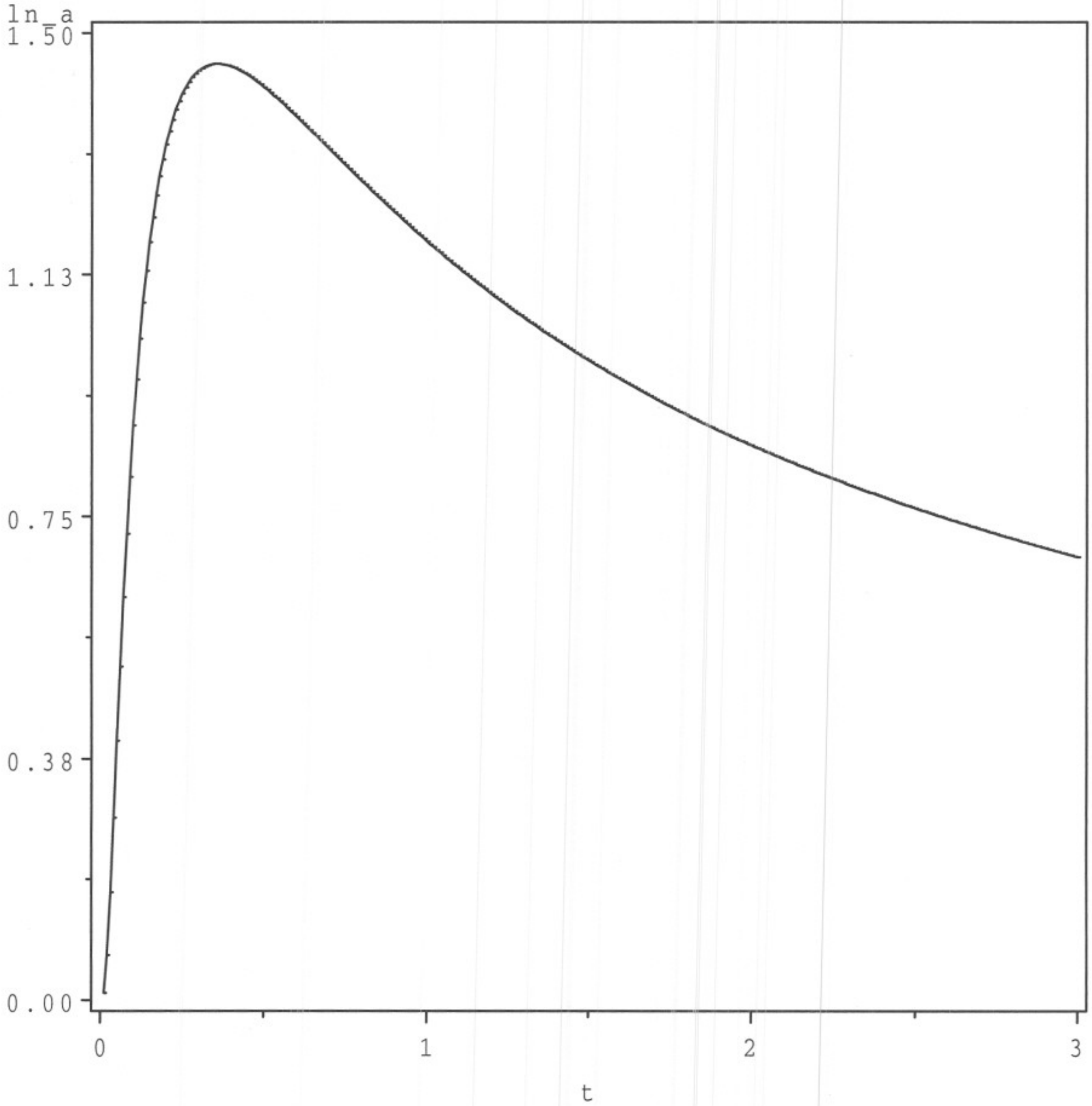
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} GAMINV(0.9502, \alpha) = \begin{cases} 1.58 & \alpha=2 \\ 2.10 & \alpha=3 \end{cases}$$

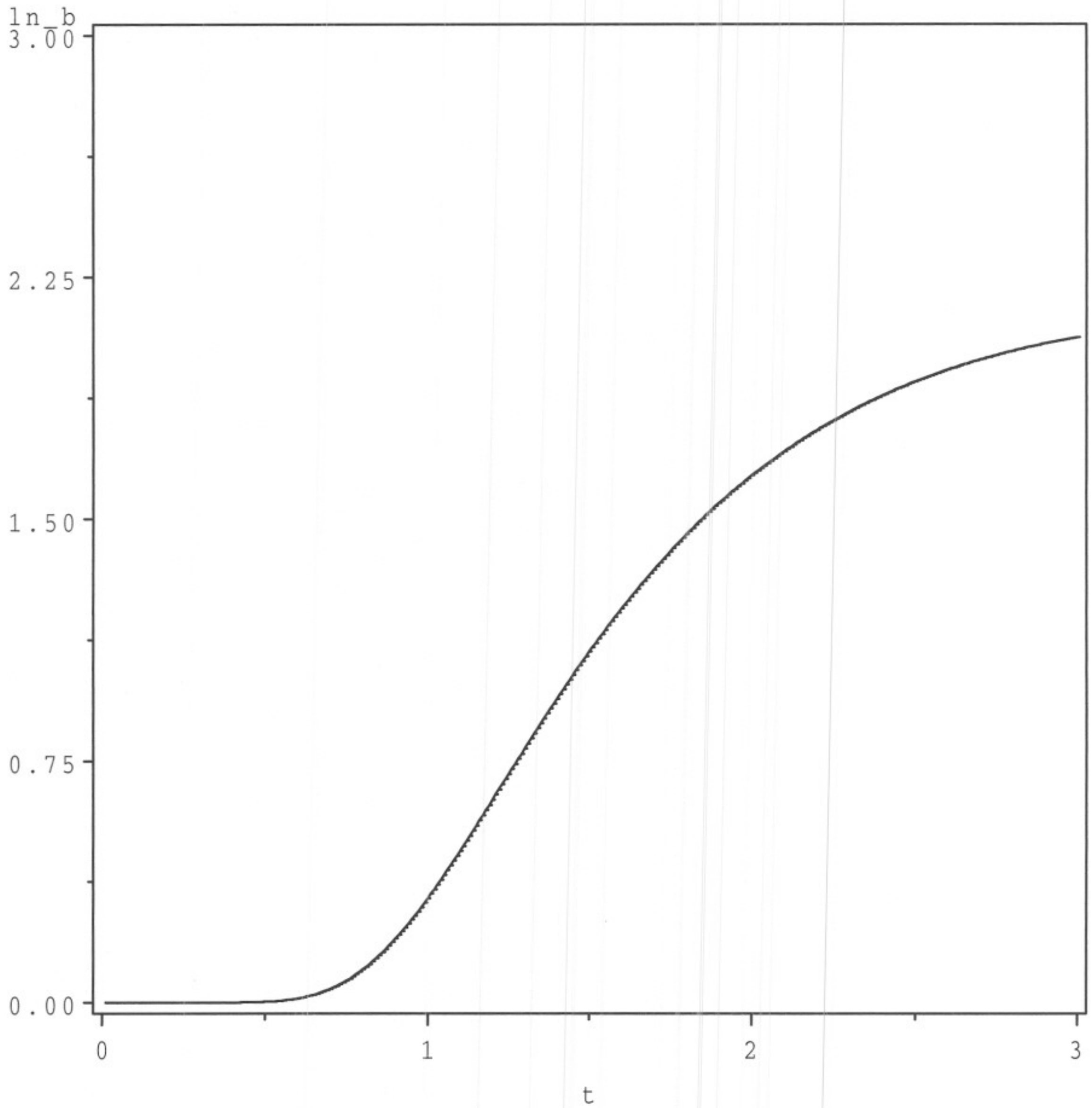
```
options ls=80 nocenter;

filename gsasfile 'd:\survival\haz.ps';
goptions
  device=ps
  gsfname=gsasfile
  gsfmode=append
  gsflen=80
  colors=(black);

axis1 length=5.5in major=(number=4) minor=(number=1);
axis2 length=5.5in major=(number=5) minor=(number=1);

data indat;
do i = 1 to 300;
t = 0.01*i;
pwa=0.5;
pwb=1.5;
lwa=3**((1/pwa)-1);
lwb=3**((1/pwb)-1);
wei_a = pwa*lwa*((lwa*t)**(pwa-1));
wei_b = pwb*lwb*((lwb*t)**(pwb-1));
plna=1;
plnb=3;
llna = exp(probit(0.950212932)/plna)/3;
llnb = exp(probit(0.950212932)/plnb)/3;
ln_a = 0.398942280*exp(-0.5*((plna*(log(llna*t)))**2));
ln_a = (plna/t)*ln_a;
ln_a = ln_a / (1-probnorm(plna*log(llna*t)));
ln_b = 0.398942280*exp(-0.5*((plnb*(log(llnb*t)))**2));
ln_b = (plnb/t) * ln_b;
ln_b = ln_b / (1-probnorm(plnb*log(llnb*t)));
alf_a = 2;
alf_b = 3;
lga = gaminv(0.950212932,alf_a)/3;
lgb = gaminv(0.950212932,alf_b)/3;
gam_a = lga*((lga*t)**(alf_a-1))*exp(-lga*t)
  / gamma(alf_a);
gam_a = gam_a / (1-probgam(lga*t,alf_a));
gam_b = lgb*((lgb*t)**(alf_b-1))*exp(-lgb*t)
  / gamma(alf_b);
gam_b = gam_b /(1-probgam(lgb*t,3));
output;
end;

proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot wei_a*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;

proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot wei_b*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;
```

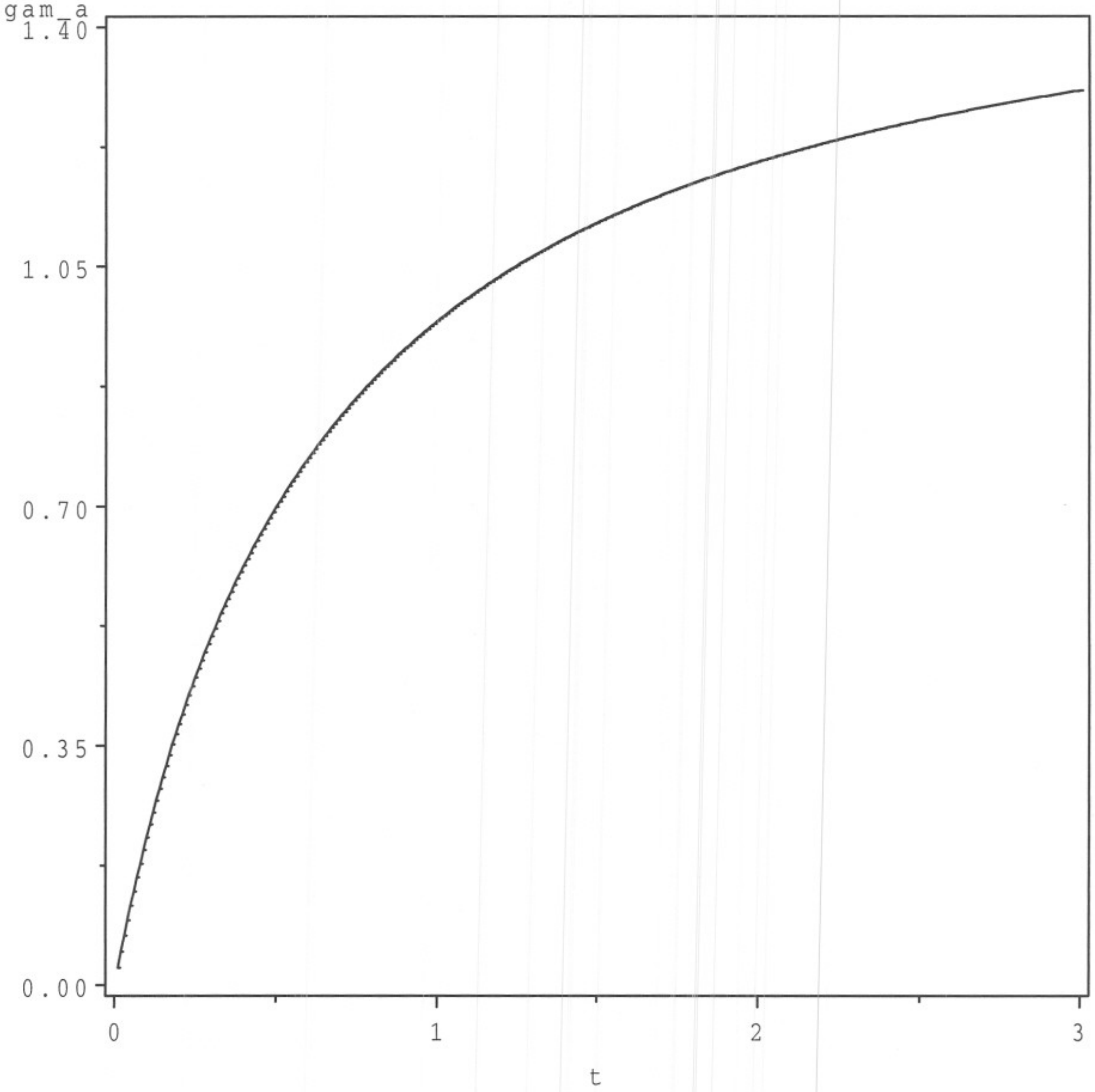
```
proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot ln_a*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;

proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot ln_b*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;

proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot gam_a*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;

proc gplot;
symbol value=point interpol=l;
plot gam_b*t / haxis=axis1 vaxis=axis2;

run;
```


wei_a
9.00
6.75
4.50
2.25
0.00
0
1
2
3
t

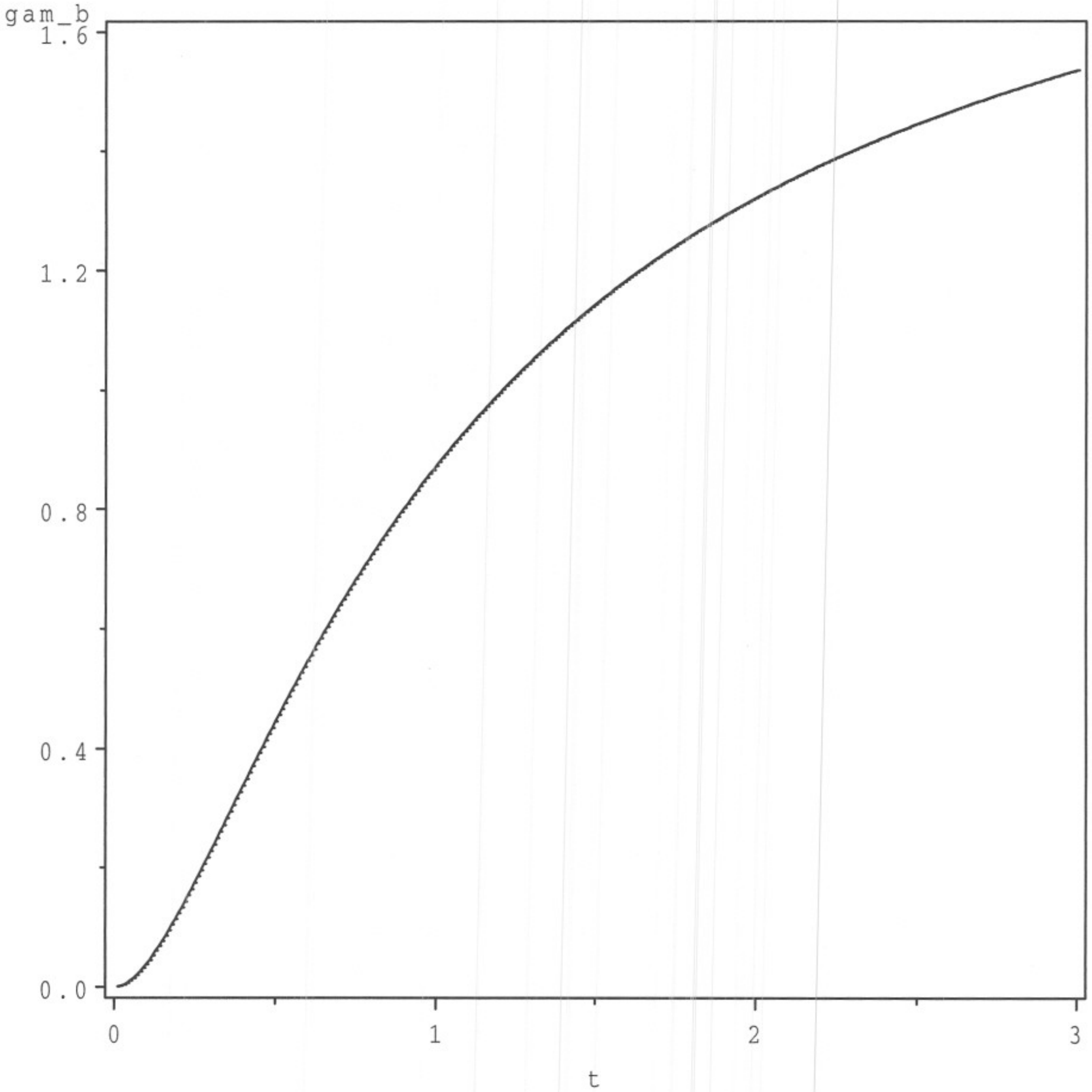

wei_b
1.50
1.13
0.75
0.38
0.00
0
1
2
3
t


ln_a
1.50
1.13
0.75
0.38
0.00
0
1
2
3
t


ln_b
3.00
2.25
1.50
0.75
0.00
0
1
2
3
t



gam_a
1.40
1.05
0.70
0.35
0.00
0
1
2
3
t



gam_b
1.6
1.2
0.8
0.4
0.0
0
1
2
3
t

```
options ls=80 nocenter nodate;

data indat;
input status time;
* status: 1=death, 0=censoring;
cards;
1 2
1 6
1 12
1 54
0 56
1 68
1 89
1 96
1 96
0 125
0 128
0 131
0 140
0 141
1 143
0 145
1 146
0 148
0 162
1 168
0 173
0 181
;

** Compute Kaplan-Meier estimate **;
proc lifetest;
  time time*status(0);

run;
```

The LIFETEST Procedure

Product-Limit Survival Estimates

time	Survival	Failure	Survival Standard Error	Number Failed	Number Left
0.000	1.0000	0	0	0	22
2.000	0.9545	0.0455	0.0444	1	21
6.000	0.9091	0.0909	0.0613	2	20
12.000	0.8636	0.1364	0.0732	3	19
54.000	0.8182	0.1818	0.0822	4	18
56.000*	.	.	.	4	17
68.000	0.7701	0.2299	0.0904	5	16
89.000	0.7219	0.2781	0.0967	6	15
96.000	.	.	.	7	14
96.000	0.6257	0.3743	0.1051	8	13
125.000*	.	.	.	8	12
128.000*	.	.	.	8	11
131.000*	.	.	.	8	10
140.000*	.	.	.	8	9
141.000*	.	.	.	8	8
143.000	0.5475	0.4525	0.1175	9	7
145.000*	.	.	.	9	6
146.000	0.4562	0.5438	0.1285	10	5
148.000*	.	.	.	10	4
162.000*	.	.	.	10	3
168.000	0.3041	0.6959	0.1509	11	2
173.000*	.	.	.	11	1
181.000*	.	.	.	11	0

NOTE: The marked survival times are censored observations.

Summary Statistics for Time Variable time

Quartile Estimates

Percent	Point Estimate	95% Confidence Interval [Lower	Upper)
75	.	146.000	.
50	146.000	96.000	.
25	89.000	12.000	146.000

Mean	Standard Error
121.310	13.125

2.

$T_{(l)}$	$D_{(l)}$	$R(T_{(l)})$	$\hat{S}(T_{(l)})$
0	0	22	1
2	1	22	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{22}) = 0.9545$
6	1	21	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{21}) = 0.9091$
12	1	20	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{20}) = 0.8636$
54	1	19	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{19}) = 0.8182$
68	1	17	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{17}) = 0.7701$
89	1	16	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{16}) = 0.7219$
96	2	15	הנ"ל $\times (1-\frac{2}{15}) = 0.6257$
143	1	8	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{8}) = 0.5475$
146	1	6	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{6}) = 0.4562$
168	1	3	הנ"ל $\times (1-\frac{1}{3}) = 0.3041$

התוצאות תואמות עם התוצאות בפלט המחשב (גם האומד וגם השונות)

נוסחת Greenwood:

$$\hat{V}ar(\hat{S}(t)) = \hat{S}(t)^2 \, V(t)$$

כאשר

$$V(t) = \sum_{l: T_{(l)} \le t} \frac{d_l}{R(T_{(l)})(R(T_{(l)}) - d_l)}$$

$T_{(l)}$	$V(T_{(l)})$	$\sqrt{\hat{V}ar(\hat{S}(t))} = \hat{S}(t)\sqrt{\hat{V}(t)}$
2	$\frac{1}{22\times21} = 0.002165$	0.0444
6	הנ"ל $+ \frac{1}{21\times20} = 0.004545$	0.06129
12	הנ"ל $+ \frac{1}{20\times19} = 0.007177$	0.07316
54	הנ"ל $+ \frac{1}{19\times18} = 0.01010$	0.08223
68	הנ"ל $+ \frac{1}{17\times16} = 0.01378$	0.09039
89	הנ"ל $+ \frac{1}{16\times15} = 0.01794$	0.09670
96	הנ"ל $+ \frac{2}{15\times13} = 0.02820$	0.1051
143	הנ"ל $+ \frac{1}{8\times7} = 0.04606$	0.1175
146	הנ"ל $+ \frac{1}{6\times5} = 0.07939$	0.1285
168	הנ"ל $+ \frac{1}{3\times2} = 0.2461$	0.1508

שימו לב לעליה הניכרת בשונות בזנב הימני בגלל הצנזורה

3. נתון: $D_1 \sim Bin(n_1, p_1)$, $D_2 \sim Bin(n_2, p_2)$

D_1, D_2 ב"ת

$$Var(\hat{q}_1 \hat{q}_2) = E[(\hat{q}_1 \hat{q}_2)^2] - (E[\hat{q}_1 \hat{q}_2])^2$$

בגלל אי-תלות:

$$E[\hat{q}_1 \hat{q}_2] = E[\hat{q}_1] E[\hat{q}_2] = q_1 q_2$$

וכן

$$E[(\hat{q}_1 \hat{q}_2)^2] = E[\hat{q}_1^2] E[\hat{q}_2^2]$$

$$= \{Var(\hat{q}_1) + (E[q_1])^2\}\{Var(\hat{q}_2) + (E[\hat{q}_2])^2\}$$

$$= \left\{\frac{p_1 q_1}{n_1} + q_1^2\right\}\left\{\frac{p_2 q_2}{n_2} + q_2^2\right\}$$

$$= \left(\frac{p_1 q_1}{n_1}\right)\left(\frac{p_2 q_2}{n_2}\right) + \left(\frac{p_1 q_1}{n_1}\right)(q_2^2) + \left(\frac{p_2 q_2}{n_2}\right)(q_1^2) + q_1^2 q_2^2$$

לכן

$$Var(\hat{q}_1 \hat{q}_2) = E[(\hat{q}_1 \hat{q}_2)^2] - (E[\hat{q}_1 \hat{q}_2])^2$$

$$= \left(\frac{p_1 q_1}{n_1}\right)\left(\frac{p_2 q_2}{n_2}\right) + \left(\frac{p_1 q_1}{n_1}\right)(q_2^2) + \left(\frac{p_2 q_2}{n_2}\right)(q_1^2)$$

$$= q_1 q_2 \left[\frac{p_1 q_2}{n_1} + \frac{p_2 q_1}{n_2} + \left(\frac{p_1}{n_1}\right)\left(\frac{p_2}{n_2}\right)\right]$$

$$\doteq q_1 q_2 \left[\frac{p_1 q_2}{n_1} + \frac{p_2 q_1}{n_2}\right]$$

עבור n_1, n_2 גדולים (כך שהאבר האחרון בסוגריים זניח ביחס לשני האברים האחרים).

נקבל

$$\hat{Var}\left((\hat{q}_1\hat{q}_2)\right) \doteq (\hat{q}_1\hat{q}_2)^2 \left[\frac{D_1}{n_1(n_1-D_1)} + \frac{D_2}{n_2(n_2-D_2)}\right]$$

ניתן לראות כי הביטוי הנ״ל הינו באותה צורה כזאת של נוסחאות Greenwood עבור השונות של אומד ה- Kaplan-Meier.

(המדגים אינם ממש שקולים כי הגורמים שמכפילים באומד KM אינם בדיוק בלתי-תלויים, אמנם יש דמיון מסוים.)