ניתוח השרדות - תיאוריה של המודל עם פונקצית hazard

שהיא פונקצית דרגות

(יש סימון קצת שונה מזה של השיעור, אך הכל מוסבר.)

יש לנו

$$\lambda(t)=\lambda_k \quad \text{עבור} \quad t\in[t_{k-1},t_k),\ k=1,\dots,K$$

נוכל לרשום

$$\lambda(t)=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\,\xi_k(t)$$

כאשר

$$\xi_k(t)=\left.\begin{matrix}1 & t\in[t_{k-1},t_k)\\ 0 & \text{אחרת}\end{matrix}\right\}$$

באופן דומה נוכל לרשום

$$\Lambda(t)=\sum_{k=1}^{K}\xi_k(t)\left[\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\Delta_j+\lambda_k(t-t_{k-1})\right]$$

כאשר $\Delta_j=t_j-t_{j-1}$.

(דיברנו על זה בכיתה).

נאמוד את λ_k דרך שיטת נראות מרבית.

כזכור, הביטוי הכללי לפונקצית הלוג-נראות הינו

$$l=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\log\lambda(X_i)-\sum_{i=1}^{n}\Lambda(X_i)$$

אצלנו מקבלים

$$l=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\sum_{k=1}^{K}(\log\lambda_k)\,\xi_k(X_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\xi_k(X_i)\left[\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\Delta_j+\lambda_k(X_i-t_{k-1})\right]$$

[שימו לב כי

$$\log\sum\lambda_k\xi_k(t)=\sum(\log\lambda_k)\,\xi_k(t)$$

מכיוון שלכל t יש אינדקס k אחד רק ש- $\xi_k(t)=1$

ובשאר הערכים של k יש לנו $\xi_k(t)=0$]

בס"ד

כעת

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_r} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sum_{k=1}^{K} \xi_k(X_i) \frac{\partial \log \lambda_k}{\partial \lambda_r}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \xi_k(X_i) \left[\sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_r} + (X_i - t_{k-1}) \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_r} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \lambda_r^{-1} \xi_r(X_i)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \xi_k(X_i) \left[\Delta_r I(1 \le r \le k-1) + (X_i - t_{k-1}) I(k=r) \right]$$

נשים לב ש- $\xi_k(X_i) I(1 \le r \le k-1)$ שווה 1 אם

$$(*) \begin{cases} X_i \in [t_{k-1}, t_k) \\ k-1 \ge r \end{cases}$$

ושווה 0 אחרת. לכן

$$\Sigma_k \, \xi_k(X_i) I(1 \le r \le k-1)$$

שווה 1 אם קיים k כך ש- $(*)$ מתקיים, והתנאי הנ"ל שקול לתנאי ש- $X_i \ge t_r$. אחרת הסכום הנ"ל שווה 0.

לסיכום מקבלים

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_r} = \lambda_r^{-1} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \xi_r(X_i)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta_r I(X_i \ge t_r) + (X_i - t_{r-1}) \xi_r(X_i) \right]$$

$$= \lambda_r^{-1} \delta^*(r) - \tau^*(r)$$

כאשר

$$\delta^*(r) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \xi_r(X_i)$$

$=$ מספר האירועים שנפלו ב- $[t_{r-1}, t_r)$

$$\tau^*(r) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i(r)$$

$$\hat{\lambda}_r = \frac{\delta^*(r)}{\tau^*(r)} .$$

כעת נזכור כי

$$\hat{\lambda} \;\dot{\sim}\; N(\lambda, \mathcal{I}^{-1})$$

כאשר

$$\mathcal{I} = E[\mathcal{J}], \quad \mathcal{J}_{rs} = -\frac{\partial \ell}{\partial\lambda_r\,\partial\lambda_s}$$

[כאן אנחנו מסמנים $\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_K\end{bmatrix}$]

מהביטוי $\frac{\partial \ell}{\partial\lambda_r} = \lambda_r^{-1}\delta^*(r) - \tau^*(r)$ רואים כי

$$\frac{\partial \ell}{\partial\lambda_r\,\partial\lambda_s} = \begin{cases} -\lambda_r^{-2}\,\delta^*(r) & r=s \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2}\delta^*(1) & & & \\ & \lambda_2^{-2}\delta^*(2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_K^{-2}\delta^*(K) \end{bmatrix}$$

בס"ד

ולכן

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} E[\delta^*(1)] & & & 0 \\ & \lambda_2^{-2} E[\delta^*(2)] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_K^{-2} E[\delta^*(K)] \end{bmatrix}$$

מכיוון ש- $\mathcal{I}$ הינה מטריצה אלכסונית, מתקבל כי

$$\mathcal{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2} E[\delta^*(1)]^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{2} E[\delta^*(2)]^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_K^{2} E[\delta^*(K)] \end{bmatrix}$$

דהיינו, עבור n גדול

$$Var(\hat{\lambda}_r) = \lambda_r^2 E[\delta^*(r)]^{-1}$$

$$Cov(\hat{\lambda}_r, \hat{\lambda}_s) = 0 \qquad r \neq s$$

כפי שהוסבר בכיתה, אומדים את השונויות על ידי

$$\hat{Var}(\hat{\lambda}_r) = \hat{\lambda}_r^2 \delta^*(r)^{-1} = \frac{\delta^*(r)^2}{\tau^*(r)^2} \delta^*(r)^{-1}$$

$$= \frac{\delta^*(r)}{\tau^*(r)^2}$$