<u>למה</u>: יש לנו

$$\hat{\Lambda}_{NA}(t) - \Lambda(t) \doteq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\delta_i I(X_i \le t)}{r(X_i)} - c(X_i)\right]$$

כאשר

$$r(s) = Pr(X_i \ge s)$$
$$c(s) = \int_0^{\min\{t,s\}} \frac{\lambda(u)}{r(u)}\, du$$

<u>הוכחה</u> (ראשי פרקים): במשך ההוכחה נשתמש בטרמינולוגיה מסוג Riemann-Stieltjes. אם יש לנו פונקציה גזירה $A(t)$ עם נגזרת $a(t)$, אזי

$$\int_0^t h(s)\, dA(s) = \int_0^t h(s) a(s)\, ds$$

ואם $A(t)$ היא פונקצית מדרגות מצטברת

$$A(t) = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell I(t_\ell^* \le t)$$

אזי

$$\int_0^t h(s)\, dA(s) = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell h(t_\ell^*) I(t_\ell^* \le t)$$

כעת, יש לנו

$$\hat{\Lambda}_{NA}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i I(X_i \le t)}{\sum_j I(X_j \ge X_i)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i I(X_i \le t)}{r(X_i)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \delta_i I(X_i \le t)\left[\frac{1}{\sum_j I(X_j \ge X_i)} - \frac{1}{n r(X_i)}\right]$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

(2)

$$\text{II} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i\, I(X_i \le t) \left[ \frac{\frac{1}{n}\sum_j I(X_j \ge X_i) - r(X_i)}{r(X_i)\left[\frac{1}{n}\sum_j I(X_j \ge X_i)\right]} \right]$$ רס״ן

נסמן

$$\Delta_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(X_j \ge t) - r(t)$$

לפי משפט גליבנקו-קנטלי,

$$\sup_t |\Delta_n(t)| \to 0$$

לכן נוכל לכתוב

$$\text{II} \doteq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i\, I(X_i \le t)\, \frac{\Delta_n(X_i)}{r(X_i)^2}$$

כעת נסמן

$$\tilde{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i\, I(X_i \le t)$$

$$\tilde{F}(t) = \Pr(X_i \le t,\ \delta_i = 1)$$

כעת נסמן:

$f(t)$ = הצפיפות של זמן עד אירוע $T$

$V$ = זמן עד צנזורה

אזי נוכל לכתוב (בהסתמך על אי-תלות בין $T$ ל-$V$)

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t) &= \Pr(X_i \le t,\ \delta_i = 1) \\ &= \int_0^t f(s)\Pr(V > s)\,ds \\ &= \int_0^t \lambda(s) S(s) \Pr(V > s)\,ds \\ &= \int_0^t \lambda(s) r(s)\,ds\end{aligned}$$

$$\tilde{F}'(t) = \lambda(t) r(t)$$

(3)

נס'ן

לכן

$$\text{I} \doteq -\int_0^t \frac{\Delta_n(s)}{r(s)^2}\, d\tilde{F}_n(s)$$

$$= -\int_0^t \frac{\Delta_n(s)}{r(s)^2}\, d\tilde{F}(s)$$

$$- \int_0^t \frac{\Delta_n(s)}{r(s)^2}\left(d\tilde{F}_n(s) - dF(s)\right)$$

אפשר להראות כי האבר השני זניח

$$\doteq -\int_0^t \frac{\Delta_n(s)}{r(s)^2}\, d\tilde{F}(s)$$

$$= -\int_0^t \frac{\lambda(s)}{r(s)}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(X_j \geq s) - r(s)\right] ds$$

$$= \int_0^t \lambda(s)\, ds - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\lambda(s)}{r(s)} I(X_j \geq s)\, ds$$

$$= \Lambda(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i)$$

לכן

$$\hat{\Lambda}_{NA}(t) \doteq \Lambda(t) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i I(X_i \leq t)}{r(X_i)} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i)$$

וזאת היא התוצאה שרצינו.

<u>צ"ל</u>:

$$E\left[\frac{\delta_i I(X_i \leq t)}{r(X_i)} - c(X_i)\right] = 0$$

<u>הוכחה</u>:

$$c(X_i) = \int_0^t \frac{\lambda(s)}{r(s)} I(X_i \geq s)\, ds$$

$$E[c(X_i)] = \int_0^t \frac{\lambda(s)}{r(s)} \underbrace{Pr(X_i \geq s)}_{= r(s)}\, ds = \Lambda(t)$$

$$E\left[\frac{\delta_i I(X_i \leq t)}{r(X_i)}\right] = \int_0^t \frac{1}{r(s)}\, d\tilde{F}(s)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{r(s)} \lambda(s) r(s)\, ds = \Lambda(t)$$