בינארי - תרגיל מס' 3 - פתרון

1. א.

$$\hat{\omega} = \frac{50 \cdot 180}{20 \cdot 150} = 3$$

$$\log \hat{\omega} = 1.0986$$

$$\omega^* = 2.5, \quad \log \omega^* = 0.9163$$

$$\widehat{Var}(\log \hat{\omega}) = \frac{1}{n_{00}} + \cdots + \frac{1}{n_{11}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} + \frac{1}{20} + \frac{1}{180}$$

$$= 0.0822$$

$$Z = \frac{\log \hat{\omega} - \log \omega^*}{\sqrt{\widehat{Var}(\log \hat{\omega})}} = \frac{1.0986 - 0.0822}{\sqrt{0.0822}} = 0.636$$

$$\chi^2 = Z^2 = 0.404$$

לא דוחים ברמת המובהקות

ב. נשתמש בנוסחאות

$$N_{00}(\omega) = \frac{X - Y}{2(\omega - 1)}$$

[נכתוב ע"י שכירות ראשית בלשון N_{11} במקום N_{00}]

$$X = \omega(n_{0\cdot} + n_{\cdot 0}) + (n_{1\cdot} - n_{\cdot 0})$$

$$Y = [X^2 - 4\omega(\omega - 1) n_{0\cdot} n_{\cdot 0}]^{1/2}$$

In this year's lectures I presented N_11 in class rather than N_00. The final result is the same.

אז לפי: $n_{0\cdot} = 200, \quad n_{1\cdot} = 200, \quad n_{\cdot 0} = 70, \quad n_{\cdot 1} = 330$

נפתרון זה נוסחאות עבור $\omega = \omega^* = 2.5$

$$X = (2.5)(200 + 70) + (200 - 70) = 805$$

$$Y = [(805)^2 - 4(200)(70)(2.5)(1.5)]^{1/2} = 661.83$$

$$N_{00}(\omega^*) = \frac{805 - 661.83}{2(1.5)} = 47.7218$$

$N_{00}(\omega^*)$	$N_{01}(\omega^*)$	=	47.7218	152.2782
$N_{10}(\omega^*)$	$N_{11}(\omega^*)$		22.2782	177.7218

$$\widehat{Var}(n_{11}) = \left[\frac{1}{N_{00}(\omega^*)} + \cdots + \frac{1}{N_{11}(\omega^*)}\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{47.7218} + \frac{1}{152.2782} + \frac{1}{22.2782} + \frac{1}{177.7218}\right)^{-1}$$

$$= (0.07804)^{-1} = 12.8147$$

לכן

$$\chi^2 = \frac{(180 - 177.7218)^2}{12.8147} = 0.4050$$

$$\chi^2_{wcc} = \frac{(|180 - 177.7218| - \frac{1}{2})^2}{12.8147} = 0.2467$$

התוצאה בלתי תיקון הרציפות דומה לתוצאות שקיבלנו בסעיף א'.

j	שכבת גיל	$\hat{\omega}_j = n_{11j} n_{00j} / n_{01j} n_{10j}$
1	45-54	$\hat{\omega}_1 = \frac{138 \cdot 25}{21 \cdot 29} \approx 5.665$
2	55-64	$\hat{\omega}_2 = \frac{139 \cdot 42}{34 \cdot 27} \approx 6.36$
3	65-74	$\hat{\omega}_3 = \frac{88 \cdot 19}{36 \cdot 18} \approx 2.58$

j	שכבת גיל	$\hat{\ell}_j = \log \hat{\omega}_j$	$\widehat{Var}(\hat{\ell}_j) = \frac{1}{n_{00}} + \frac{1}{n_{01}} + \frac{1}{n_{10}} + \frac{1}{n_{11}}$
1	45-54	1.734	$\frac{1}{25} + \frac{1}{21} + \frac{1}{29} + \frac{1}{138} = 0.129$
2	55-64	1.85	$\frac{1}{42} + \frac{1}{34} + \frac{1}{27} + \frac{1}{139} = 0.097$
3	65-74	0.948	$\frac{1}{19} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{88} = 0.147$

: Woolf שיטת

$$\hat{\omega} = e^{\hat{\ell}}$$

$$\hat{\ell} = \frac{\sum_j \hat{V}_j^{-1} \hat{\ell}_j}{\sum_j \hat{V}_j^{-1}} = \frac{(1/0.129) \cdot 1.734 + (1/0.097) \cdot 1.85 + (1/0.147) \cdot 0.948}{\frac{1}{0.129} + \frac{1}{0.097} + \frac{1}{0.147}}$$

$\hat{\ell} \simeq 1.567$

$\hat{\omega} = e^{1.567} \approx 4.792$ ✓

$\hat{Var}(\hat{\ell}) = \frac{1}{\sum_j \hat{V}_j^{-1}} = \frac{1}{24.864} \approx 0.0402$

$\hat{\ell} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\hat{Var}(\hat{\ell})}$: ℓ עבור 95% רמת ס"מ

$1.567 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.0402}$

$[1.174 , 1.96]$

$e^{\hat{\ell} \pm 1.96\sqrt{\hat{Var}(\hat{\ell})}}$ ✓ : ω עבור ס"מ

$[3.235 , 7.099]$

$H_0: \ell = 0$

$\frac{\hat{\ell}}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\ell})}} \overset{\cdot}{\underset{H_0}{\sim}} N(0,1)$

$\frac{1.567}{\sqrt{0.0402}} \approx 7.815 \Rightarrow$ H_0 את לדחות

אמת סטטיסטי:

• לפי שיטת Woolf

$$\chi^2_b = \sum_{j=1}^{J} \frac{(\hat{l}_j - \hat{l})^2}{v_j}$$

$$= \frac{(1.734 - 1.567)^2}{0.129} + \frac{(1.85 - 1.567)^2}{0.097} + \frac{(0.948 - 1.567)^2}{0.147}$$

$$= 3.6484$$

• לפי שיטת Breslow-Day

נשערך בהתחלה

$$N_{11}(\omega) = (X - Y)/[2(\omega - 1)]$$

$$X = \omega(n_{1\cdot} + n_{\cdot 1}) + (n_{0\cdot} - n_{\cdot 1})$$

$$Y = [X^2 - 4n_{1\cdot} n_{\cdot 1} \omega(\omega - 1)]^{1/2}$$

ונבדוק אותו התאימות עבור $\omega = \hat{\omega} = 4.792$.

שלות 1:

$$X = (4.792)(46+54) + (167 - 54) = 592.20$$

$$Y = [(592.20)^2 - 4(46)(54)(4.792)(3.792)]^{1/2} = 412.49$$

$$N_{11} = 23.70 \qquad \begin{matrix} 136.70 & 30.30 \\ 22.30 & 23.70 \end{matrix}$$

$$\hat{Var}(n_{11}) = \left(\frac{1}{136.70} + \cdots + \frac{1}{23.70}\right)^{-1} = 7.8520$$

שלות 2:

$$X = (4.792)(76+69) + (173 - 69) = 798.84$$

$$Y = [(798.84)^2 - 4(76)(69)(4.792)(3.792)]^{1/2} = 506.94$$

$$N_{11} = 38.49 \qquad \begin{matrix} 135.49 & 30.51 \\ 37.51 & 38.49 \end{matrix}$$

$$\hat{Var}(n_{11}) = \left(\frac{1}{135.49} + \cdots + \frac{1}{38.49}\right)^{-1} = 10.776$$

שלות 3:

$$X = (4.792)(55+37) + (124 - 37) = 527.86$$

$$Y = [(527.86)^2 - 4(55)(37)(4.792)(3.792)]^{1/2} = 361.56$$

$$N_{11} = 21.93 \qquad \begin{matrix} 90.93 & 15.07 \\ 33.07 & 21.93 \end{matrix}$$

$$\hat{Var}(n_{11}) = \left(\frac{1}{90.93} + \cdots + \frac{1}{21.93}\right)^{-1} = 6.5277$$

לכן

$$\chi^2_{BD} = \frac{(25-23.70)^2}{7.8520} + \frac{(42-38.49)^2}{10.776} + \frac{(21.93-19)^2}{6.5277}$$

$$= 2.6737$$

לא תואם לגמרי עם SAS, מכיוון שב- SAS משתמשים
ב- $\hat{\omega}_{MH}$ במבחן Breslow-Day במקום שהשתמשנו
ב- $\hat{\omega}_{Woolf}$.

: Tarone for

$$\chi^2_{BDT} = \chi^2_{BD} - \left[\frac{\left(\sum_j [n_{11j} - N_{11j}(\hat{\omega})]\right)^2}{\sum_j \widehat{Var}(N_{11j} \mid N_{\cdot 1j} = n_{\cdot 1j})} \right]$$

$\widehat{Var}(N_{11j} \mid N_{\cdot 1j} = n_{\cdot 1j}) = V_j(\hat{\omega})$

$\sum_j [n_{11j} - N_{11j}(\hat{\omega})]$

$= (25 - 23.70) + (42 - 38.49) + (19 - 21.93) = 1.88$

$\sum_j V_j(\hat{\omega}) = 7.8520 + 10.776 + 6.5277 = 25.1557$

$$\left[\ \right] = \frac{(1.88)^2}{25.1557} = 0.1405$$

$$\chi^2_{BDT} = 2.6737 - 0.1405 = 2.5332$$

.2b מבחן MH :

$H_0: \ \omega = 1$

$$\chi^2_{MH} = \frac{\left[\sum_j \left\{ n_{11j} - \frac{n_{1\cdot j} n_{\cdot 1 j}}{n_{\cdot\cdot}} \right\}\right]^2}{\sum_j \frac{n_{0\cdot j} n_{1\cdot j} n_{\cdot 0 j} n_{\cdot 1 j}}{n_{\cdot\cdot j}^2 (n_{\cdot\cdot j} - 1)}} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{(1)}$$

$$\chi^2_{MH} = \frac{\left[\left(138 - \frac{167 \cdot 159}{213}\right) + \left(139 - \frac{166 \cdot 173}{242}\right) + \left(88 - \frac{106 \cdot 124}{161}\right)\right]^2}{\frac{46 \cdot 167 \cdot 54 \cdot 159}{213^2 \cdot 212} + \frac{76 \cdot 166 \cdot 69 \cdot 173}{242^2 \cdot 241} + \frac{55 \cdot 106 \cdot 37 \cdot 124}{161^2 \cdot 160}}$$

$$= \frac{1602.3}{23.977} \approx 66.83 \ \checkmark \Rightarrow H_0 \text{ את דוחה}$$

$$\hat{\omega}_{MH} = \sum_j \frac{n_{11j} n_{00j}}{n_{\cdot\cdot j}} \Big/ \sum_j \frac{n_{01j} n_{10j}}{n_{\cdot\cdot j}}$$

$$\hat{\omega}_{MH} = \frac{\frac{138 \cdot 25}{213} + \frac{139 \cdot 42}{242} + \frac{88 \cdot 19}{161}}{\frac{21 \cdot 29}{213} + \frac{34 \cdot 27}{242} + \frac{36 \cdot 18}{161}} = \frac{50.706}{10.677} \approx 4.749 \ \checkmark$$

<u>חישוב ר"ס ל- ω ע"פ ש'ת RBG</u>

נגדיר

$$R_j^{(1)} = \frac{n_{00j}\, n_{11j}}{n_{..j}} \quad , \quad R_j^{(2)} = \frac{n_{01j}\, n_{10j}}{n_{..j}}$$

$$P_j = \frac{n_{00j} + n_{11j}}{n_{..j}} \quad , \quad Q_j = \frac{n_{01j} + n_{10j}}{n_{..j}}$$

אזי נוכל לרשום את איברים $S_1, \dots, S_5$ שבנוסחאות RBG בצורה הבאה:

$$S_1 = \Sigma_j R_j^{(1)} \quad , \quad S_2 = \Sigma R_j^{(2)}$$

$$S_3 = \Sigma_j R_j^{(1)} P_j \quad , \quad S_4 = \Sigma_j R_j^{(2)} Q_j$$

$$S_5 = \Sigma_j \left[R_j^{(1)} Q_j + R_j^{(2)} P_j \right]$$

כעת, יש לנו:

$$R_1^{(1)} = \frac{(138)(25)}{213} = 16.1971 \qquad P_1 = \frac{138+25}{213} = 0.7653$$

$$R_2^{(1)} = \frac{(139)(42)}{242} = 24.1240 \qquad P_2 = \frac{139+42}{242} = 0.7479$$

$$R_3^{(1)} = \frac{(88)(19)}{161} = 10.3851 \qquad P_3 = \frac{88+19}{161} = 0.6646$$

$$R_1^{(2)} = \frac{(29)(21)}{213} = 2.8592 \qquad Q_1 = \frac{29+21}{213} = 0.2347$$

$$R_2^{(2)} = \frac{(27)(34)}{242} = 3.7934 \qquad Q_2 = \frac{27+34}{242} = 0.2521$$

$$R_3^{(2)} = \frac{(18)(36)}{161} = 4.0248 \qquad Q_3 = \frac{18+36}{161} = 0.3354$$

$S_1 = 50.7062$, $S_2 = 10.6774$, $S_3 = 37.3401$

$S_4 = 2.9773$, $S_5 = 21.0664$

$$\hat{Var}(\log \hat{\omega}_{MH}) = \frac{S_3}{2S_1^2} + \frac{S_5}{2S_1 S_2} + \frac{S_4}{2S_2^2} = 0.03977$$

ר"ס:

$$\hat{\omega}_{MH}\, e^{\pm 1.96 [\hat{Var}(\log \hat{\omega}_{MH})]}$$

$$4.7489 \times e^{\pm 1.96 \sqrt{0.03977}} \Rightarrow [3.2124, 7.0203]$$

תואם עם SAS, ו-

The SAS System

The FREQ Procedure

Summary Statistics for alcohol by outcome
Controlling for age

Cochran-Mantel-Haenszel Statistics (Based on Table Scores)

Statistic	Alternative Hypothesis	DF	Value	Prob
1	Nonzero Correlation	1	66.8267	<.0001
2	Row Mean Scores Differ	1	66.8267	<.0001
3	General Association	1	66.8267	<.0001

Estimates of the Common Relative Risk (Row1/Row2)

Type of Study	Method	Value	95% Confidence Limits	
Case-Control (Odds Ratio)	Mantel-Haenszel	4.7489	3.2125	7.0203
	Logit	4.7912	3.2319	7.1030
Cohort (Col1 Risk)	Mantel-Haenszel	2.7186	2.1479	3.4410
	Logit	2.6603	2.0988	3.3721
Cohort (Col2 Risk)	Mantel-Haenszel	0.5779	0.4866	0.6865
	Logit	0.5879	0.4957	0.6971

Breslow-Day Test for Homogeneity of the Odds Ratios

Chi-Square	3.6761
DF	2
Pr > ChiSq	0.1591

Total Sample Size = 616

```
options ls=80 nocenter nodate;

data indat;
input age $ alcohol $ n ndied;
cards;
45-54 Low 159 21
45-54 High 54 25
55-64 Low 173 34
55-64 High 69 42
65-74 Low 124 36
65-74 High 37 19
;

data dat1;
  set;
  outcome = 'Case';
  count = ndied;
  output;
  outcome = 'Non-case';
  count = n - ndied;
  output;

proc freq;
  table age * alcohol * outcome / noprint cmh;
  weight count;

run;
```

[כאן החלפתי את ההגדרות של x=0 ו- x=1]

3.

j	$\hat{p}_{0j}$	$\hat{p}_{1j}$	$\hat{\Delta}_j = \hat{p}_{1j} - \hat{p}_{0j}$	$\hat{V}_j$	$\hat{w}_j = \hat{V}_j^{-1}$
1	29/167 = 0.1737	25/46 0.5435	0.3698	0.006253	159.9
2	27/166 = 0.1627	42/76 = 0.5526	0.3900	0.004073	245.5
3	18/106 = 0.1698	19/55 = 0.3455	0.1756	0.005441	183.8

$$\left[\quad \hat{V}_j = \frac{\hat{p}_{0j}(1-\hat{p}_{0j})}{n_{0\cdot j}} + \frac{\hat{p}_{1j}(1-\hat{p}_{1j})}{n_{1\cdot j}} \quad \text{כאן} \right]$$

$$\hat{\Delta} = \Sigma_j \hat{w}_j \hat{\Delta}_j \,/\, \Sigma_j \hat{w}_j$$

$$\Sigma_j w_j = 159.9 + 245.5 + 183.8 = 589.2$$

$$\hat{w}_1 / \Sigma_j \hat{w}_j = 0.2714$$
$$\hat{w}_2 / \Sigma_j \hat{w}_j = 0.4167$$
$$\hat{w}_3 / \Sigma_j \hat{w}_j = 0.3119$$

$$\hat{\Delta} = [(0.2714)(0.3698) + (0.4167)(0.3900) + (0.3119)(0.1756)] = 0.3177$$

$$\hat{Var}(\hat{\Delta}) = (\Sigma_j \hat{w}_j)^{-1} = 0.001697$$

ר"ס ל-Δ:

$$0.3177 \pm 1.96\sqrt{0.00167}$$

$$[0.2369,\ 0.3984]$$

מבחן ל- $H_0: \Delta = 0$

$$Z = \frac{\hat{\Delta}}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\Delta})}} = \frac{0.3177}{\sqrt{0.001697}} = 7.71$$

דוחים את H_0 באופן חזק.

מבחן לאינטראקציה:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta})^2}{\hat{V}_j} = \sum_j \hat{w}_j (\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta})^2$$

$$= (159.9)(0.3698 - 0.3177)^2 + (245.5)(0.3900 - 0.3177)^2$$

$$+ (183.8)(0.1756 - 0.3177)^2 = 5.4259$$

לפי התפלגות χ^2_2, $p\text{-value} = 0.0663$

יש כאן אינדיקציה לאינטראקציה.

הערה: מכיוון שהנדון כאן האם מוצדק להצרף את הנתונים של הטבלאות השונות לאומד משותף, יש לבצע את מבחן לאינטראקציה בר"מ גבוהה יותר מה- 0.05 הרגילה - כמו ר"מ של 0.10.

במקרה של ω אין כלל אינדיקציה לאינטראקציה בעוד שבמקרה של Δ יש אינדיקציה משמעותית יותר.

$$\chi^2_{MH} = \frac{\left[\left|\sum_j \left\{n_{11j} - \frac{n_{1\cdot j}\, n_{\cdot 1 j}}{n_{\cdot\cdot}}\right\}\right| - \frac{1}{2}\right]^2}{\sum_j \frac{n_{0\cdot j}\, n_{1\cdot j}\, n_{\cdot 0 j}\, n_{\cdot 1 j}}{n^2_{\cdot\cdot j}\,(n_{\cdot\cdot j} - 1)}} \qquad .1c$$

$$= \frac{\left[\left|\left(0 - \frac{0\cdot 1}{2}\right)\cdot a + \left(1 - \frac{1\cdot 1}{2}\right)\cdot b + \left(0 - \frac{1\cdot 1}{2}\right)\cdot c + \left(1 - \frac{2\cdot 1}{2}\right)\cdot d\right| - \frac{1}{2}\right]^2}{\frac{2\cdot 0\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1}\cdot a + \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1}\cdot b + \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1}\cdot c + \frac{0\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 1}\cdot d}$$

$$= \frac{\left[\left|\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right| - \frac{1}{2}\right]^2}{\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c} = \frac{\frac{1}{4}\left[|b-c| - 1\right]^2}{\frac{1}{4}(b+c)} = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

$$\hat{\omega}_{MH} = \frac{\sum_j \frac{n_{11j}\, n_{00j}}{n_{\cdot\cdot j}}}{\sum_j \frac{n_{01j}\, n_{10j}}{n_{\cdot\cdot j}}} = \frac{\frac{0\cdot 1}{2}\cdot a + \frac{1\cdot 1}{2}\cdot b + \frac{0\cdot 0}{2}\cdot c + \frac{1\cdot 0}{2}\cdot d}{\frac{1\cdot 0}{2}\cdot a + \frac{0\cdot 0}{2}\cdot b + \frac{1\cdot 1}{2}\cdot c + \frac{0\cdot 1}{2}\cdot d} \qquad .2$$

$$= \frac{1}{2}b \,/\, \frac{1}{2}c = \frac{b}{c}$$

. הכללה למצב בו $n_{\cdot 1j}=1$, $n_{\cdot 0j}=2$.

לוחות האפשריים:

$$\text{(א) } a:\ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \text{(ב) } b:\ \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \text{(ג) } c:\ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\text{(ד) } d:\ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \text{(ה) } e:\ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \text{(ו) } f:\ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}$$

← נסמן מספר הלוחות מסוג זה

$$\sum \left(n_{11j} - \frac{n_{1\cdot j}\, n_{\cdot 1j}}{n_{\cdot\cdot}} \right)$$

$$= a\left(0 - \frac{0\cdot 1}{3}\right) + b\left(1 - \frac{1\cdot 1}{3}\right) + c\left(0 - \frac{1\cdot 1}{3}\right) + d\left(1 - \frac{2\cdot 1}{3}\right) + e\left(0 - \frac{2\cdot 1}{3}\right) + f\left(1 - \frac{3\cdot 1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(b-e) + \frac{1}{3}(d-c)$$

$$\sum \frac{n_{0\cdot j}\, n_{1\cdot j}\, n_{\cdot 0j}\, n_{\cdot 1j}}{n_{\cdot\cdot j}^2 (n_{\cdot\cdot j}-1)} = \frac{2}{9}(b+c+d+e)$$

$$\chi^2_{MH} = \frac{\left[2(b-e)+(d-c)\right]^2}{2(b+c+d+e)}$$

עם תיקון רציפות מקבלים

$$\chi^2_{MH} = \frac{\left(\left|2(b-e)+(d-c)\right| - \frac{3}{2}\right)^2}{2(b+c+d+e)}$$

$$\sum n_{00j}\, n_{11j} = (a)(0) + (b)(2) + (c)(0) + (d)(1) + (e)(0) + (f)(0)$$

$$= 2b + d$$

$$\sum n_{01j}\, n_{10j} = (a)(0) + (b)(0) + (c)(1) + (d)(0) + (e)(2) + (f)(0)$$

$$= c + 2e$$

$$\hat{\omega}_{MH} = (2b+d)/(c+2e)$$